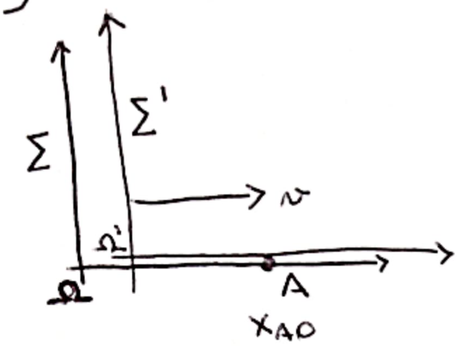
I) Trasformazioni di Lorentz

1) Sia A un pto fermo in Σ sull'asse x



Consideriamo il segmento $[0, x_{A0}]$ che ha lunghezza x_{A0} in Σ. In Σ' la sua lunghezza sarà

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot x_{A0} = x_A'(t') - x'_\Omega(t')$$

$$\Rightarrow x'_A(t') = \sqrt{1-v^2/c^2}\, x_{A0} + \underset{-vt'}{\underset{\parallel}{x'_\Omega(t')}} = \sqrt{1-v^2/c^2}\, x_{A0} - vt'$$

$$y'_A(t') = 0 \;,\; z'_A(t') = 0$$

Analogamente se B è fermo sull'asse x' di Σ' abbiamo

$$x_B(t) = \sqrt{1-v^2/c^2}\; x'_{B0} + vt$$

$$y_B(t) = 0$$

$$z_B(t) = 0$$

2) Se A è fermo in un pto generico di Σ

$$x'_A(t') = \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot x_{A0} - vt'$$

$$y'_A(t') = y_{A0}$$

$$z'_A(t') = z_{A0}$$

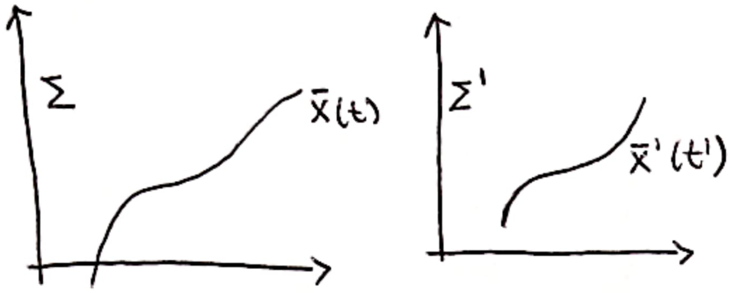
Analogamente se B è fermo in un pto generico di Σ'

$$x_B(t) = \sqrt{1-v^2/c^2} \cdot x'_{B0} + vt$$

$$y_B(t) = y'_{B0}$$

$$z_B(t) = z'_{B0}$$

3) Prendiamo un pto in moto $/\Sigma$ e Σ' canonicamente correlato a Σ



Fissato un istante t_0, il nostro pto si troverà nella posizione $\bar{x}(t_0)$.

Consideriamo A un pto fermo in $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_A(t)$ $\forall t$.

Rispetto a Σ':

$$\begin{cases} x'_A(t') = \sqrt{1-v^2/c^2}\; x(t_0) - vt' \\ y'_A(t') = y(t_0) \\ z'_A(t') = z(t_0) \end{cases}$$

Consideriamo ora un pto B fermo rispetto a Σ' tale che:

$$\begin{cases} x'_B(t') = x'(t'_0) \\ y'_B(t') = y'(t'_0) \\ z'_B(t') = z'(t'_0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_B(t) = \sqrt{1-v^2/c^2}\; x'(t'_0) + vt \\ y_B(t) = y'(t'_0) \\ z_B(t) = z'(t'_0) \end{cases}$$

Ponendo $\bar{x}'(t'_0) = \bar{x}'_A(t'_0)$ si ottiene

$$\begin{cases} x'(t'_0) = \sqrt{1-v^2/c^2}\; x(t_0) - vt'_0 \\ y'(t'_0) = y(t_0) \\ z'(t'_0) = z(t_0) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x(t_0) = \sqrt{1-v^2/c^2}\; x'(t'_0) + vt_0 \\ y(t_0) = y'(t'_0) \\ z(t_0) = z'(t'_0) \end{cases}$$

Da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned} x'(t_0') &= \frac{x(t_0) - v t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t_0' &= \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x(t_0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}\right\} \text{Trasformazioni di Lorentz}$$

$$y'(t_0') = y(t_0)$$

$$z'(t_0') = z(t_0)$$

2) Leggi di trasformazione della velocità

Partendo dalle trasformazioni di Lorentz:

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad y' = y \; , \; z' = z$$

Possiamo ricavare la velocità di un pto materiale rispetto al sistema di riferimento Σ'

$$\bar{u}'(t_0') = \frac{d}{dt'} \bar{x}'(t')\Big|_{t' = t_0'}$$

$$= \frac{dt}{dt'} \cdot \frac{d}{dt} \bar{x}'(t)\Big|_{t = t_0}$$

$$u_x'(t_0') = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} x'(t)\Big|_{t = t_0}$$

Ora $\displaystyle \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{v}{c^2} u_x(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x(t)}$

$$u_x'(t_0') = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x(t_0)} \cdot \frac{u_x(t_0) - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{u_x(t_0) - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x(t_0)}$$

$$u_y'(t_0') = \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \overset{= y(t)}{y'(t)}\Big|_{t = t_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x(t_0)} \cdot u_y(t_0)$$

$$u_z'(t_0') = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2} u_x(t_0)} \cdot u_z(t_0)$$

Tempo proprio

Siano $\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} t_1 \\ \bar{x}(t_1) \end{bmatrix}$, $\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} t_2 \\ \bar{x}(t_2) \end{bmatrix}$

Definiamo l'intervallo quadratico (è un invariante)

$$S^2(\underline{x}_2 - \underline{x}_1) = c^2(t_2 - t_1)^2 - \|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)\|^2$$

Se consideriamo una particella in moto uniforme

$\vec{x}(t) = \vec{u}(t) \cdot t$

avremo

$$S^2(\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)) = c^2(t_2 - t_1)^2 - \|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1)\|^2 =$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - \|\bar{u} \cdot (t_2 - t_1)\|^2$$

$$= c^2(t_2 - t_1)^2 - \|\bar{u}\|^2 \cdot (t_2 - t_1)^2$$

$$= (c^2 - u^2)(t_2 - t_1)^2$$

Se consideriamo un sistema proprio alla particella obbiamo che $S^2(\hat{\underline{x}}(\hat{t}_2) - \hat{\underline{x}}(t_1)) = c^2(\hat{t}_2 - \hat{t}_1)^2$

Quindi $(c^2 - u^2)(t_2 - t_1)^2 = c^2(\hat{t}_2 - \hat{t}_1)^2 \overset{def}{=} c^2(\tau_2 - \tau_1)^2$

Chiamiamo $\tau_2 - \tau_1$ variazione del tempo proprio e si ha

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{\frac{(c^2 - u^2)(t_2 - t_1)^2}{c^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{S^2(\underline{x}_2 - \underline{x}_1)}$$

Consideriamo adesso una particella che si muove con moto <u>non</u> uniforme.

Possiamo però suddividere il "tempo" in tanti piccoli intervallini $[\tau_J, \tau_{J+1}]$ in ciascuno dei quali è possibile fissare un sistema proprio alla particella il cui moto può essere approssimato ad un moto uniforme in quell'intervallo.

$$\begin{bmatrix} t \\ \overline{x}(t) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \tau \\ \overline{\xi} \end{bmatrix}$$

$$S^2(\underline{x}_{J+1} - \underline{x}_J) = S^2(\overline{\xi}_{J+1} - \overline{\xi}_J) = c^2(\tau_{J+1} - \tau_J)^2 - \|\overline{\xi}_{J+1} - \overline{\xi}_J\|^2$$

$$\Rightarrow \tau_{J+1} - \tau_J = \frac{1}{c}\sqrt{S^2(\underline{x}_{J+1} - \underline{x}_J) + \|\overline{\xi}_{J+1} - \overline{\xi}_J\|^2}$$

Definiamo il tempo proprio

$$\tau(t) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_J \Delta\tau_J$$

È possibile mostrare che

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = \sqrt{1 - \frac{v^2(s)}{c^2}}$$

e quindi $\tau(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{1 - \frac{v^2(s)}{c^2}}\, ds$

Il tempo proprio è un invariante.

Quadrivelocità

Consideriamo $\underline{x}(t) = (ct, \vec{x}(t))$.

Ricaviamo la quadrivelocità:

$$\underline{q} = \frac{d}{d\tau}\underline{x}(t) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\underline{x}(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c, \vec{v}(t))$$

Dimostriamo che è un quadrivettore:

$$\Sigma \xrightarrow{L} \Sigma'$$

$$\underline{x} \longmapsto \underline{x}'(t') = L\,\underline{x}(t)$$

$$\underline{q}'(t') = \frac{d}{d\tau'}\underline{x}'(t') = \frac{d}{d\tau'}L\,\underline{x}(t) = \frac{d\tau}{d\tau'}\frac{d}{d\tau}L\,\underline{x}(t)$$

$$= \underbrace{\frac{d\tau}{d\tau'}}_{=1}\left[L\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c, \vec{v}(t))\right)\right] =$$

perchè il tempo proprio è un invariante

$$= L\cdot\underline{q}(t) \Rightarrow \underline{q}'(t') = L\,\underline{q}(t)$$

cioè $\underline{q}$ è un quadrivettore.

Trasformazioni delle velocità partendo dalla quadrivelocità

$$\underline{q}' = L\underline{q} = L \frac{d}{d\tau}\underline{x} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} L \underline{x}$$

$$\underline{q}' = \begin{bmatrix} \dfrac{c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v'_x}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v'_y}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v'_z}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\ L\ } \begin{bmatrix} ct' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] y' = y \\[1ex] z' = z \end{bmatrix}$$

$$\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} L \underline{x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1 - \frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, c \\[2ex] \dfrac{v_x - u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] v_y \\[1ex] v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c - \frac{u}{c}v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_x - u}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

La derivata rispetto al tempo proprio di un quadrivettore è un quadrivettore

Sia $\underline{x}(t)$ un quadrivettore cioè tale che

$$\underline{x}'(t') = L\,\underline{x}(t).$$

Sia ora $\underline{\omega}(t) = \frac{d}{d\tau}\underline{x}(t)$ allora

mostriamo che è un quadrivettore:

$$\underline{\omega}'(t') = \frac{d}{d\tau'}\underline{x}'(t') = \underbrace{\frac{d\tau}{d\tau'}}_{=1} \cdot \frac{d}{d\tau}\left(L \cdot \underline{x}(t)\right)$$

$$= L \cdot \frac{d}{d\tau}\underline{x}(t) = L\,\underline{x}(t)$$

Quadriaccelerazione

Sia $$\underline{q}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} c \\ \bar{v}(t) \end{bmatrix}$$

Ricaviamo la quadriaccelerazione:

$$\underline{\alpha} = \frac{d}{d\tau}\underline{q}(t) = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\underline{q}(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot \left[-\frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{c^2}\cdot 2v\cdot a}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} c \\ \vec{v}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}(t) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left[\frac{\bar{v}\cdot\bar{a}/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} c \\ \bar{v}(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{a}(t) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{a}/c}{(1-v^2/c^2)^2} = \alpha_0 \\[2em] \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{a}/c^2\, v_x}{(1-v^2/c^2)^2} + \dfrac{1}{1-v^2/c^2} a_x = \alpha_x \\[2em] \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{a}/c^2\, v_y}{(1-v^2/c^2)^2} + \dfrac{1}{1-v^2/c^2} a_y = \alpha_y \\[2em] \dfrac{\bar{v}\cdot\bar{a}/c^2\, v_z}{(1-v^2/c^2)^2} + \dfrac{1}{1-v^2/c^2} a_z = \alpha_z \end{bmatrix}$$

Trasformazioni della velocità partendo dalla quadrivelocità (*)

$$\underline{q}' = L\underline{q} = L \frac{d}{d\tau}\underline{x} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} L \underline{x}$$

$$\underline{q}' = \begin{bmatrix} \dfrac{c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v'_x}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v'_y}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v'_z}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \xrightarrow{\ L\ } \begin{bmatrix} t' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] y' = y \\[1ex] z' = z \end{bmatrix}$$

$$\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt} L \underline{x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{1 - \frac{u}{c^2}v_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, c \\[2ex] \dfrac{v_x - u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] v_y \\[1ex] v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c - \frac{u}{c}v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_x - u}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{c}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_x'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_y'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_z'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{c-\frac{u}{c}v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_x-u}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\[2ex] \dfrac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{bmatrix}$$

Da cui

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-v'^2/c^2}\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \\[3ex] \dfrac{v_x'}{\cancel{\sqrt{1-v'^2/c^2}}} = \dfrac{v_x-u}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} = \dfrac{v_x-u}{\cancel{\sqrt{1-v'^2/c^2}}\left(1-\frac{u}{c^2}v_x\right)} \end{cases}$$

Quindi $v_x' = \dfrac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$

Analogamente v_y' e v_z'

Relazione tra accelerazione propria e coordinata

13

Consideriamo un sistema di riferimento tale per cui l'asse x sia parallelo alla velocità della particella in quell'istante, cioè tale che:

$$\bar{v}(t) = (v(t), 0, 0)$$

Allora la quadriaccelerazione diventa

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_0 = \dfrac{\frac{v}{c} \cdot a_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \\[2ex] \alpha_x = \dfrac{\frac{v^2}{c^2} a_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \dfrac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} a_x = \dfrac{a_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} \\[2ex] \alpha_y = \dfrac{a_y}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\[2ex] \alpha_z = \dfrac{a_z}{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{bmatrix}$$

cioè

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{v}{c}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} a_x \\[2ex] \dfrac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2} a_x \\[2ex] \dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} a_y \\[2ex] \dfrac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} a_z \end{bmatrix}$$

Considero ora un sistema proprio della particella cioè tale per cui $\vec{v}=(0,0,0)$

Allora

$$\underline{\alpha}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{px} \\ a_{py} \\ a_{pz} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{po} = 0 = \frac{\alpha_0 - \frac{v}{c}\alpha_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\frac{v}{c}a_x - \frac{v}{c}a_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}} = 0$$

$$\alpha_{px} = a_{px} = \frac{\alpha_x - \frac{v}{c}\alpha_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{a_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^2} - \frac{\frac{v^2}{c^2}a_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\frac{\cancel{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}a_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^{\cancel{2}}} = \frac{a_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$\alpha_{py} = a_{py} = \alpha_y = \frac{a_y}{1-v^2/c^2}$$

$$\alpha_{pz} = a_{pz} = \alpha_z = \frac{a_z}{1-v^2/c^2}$$

Quindi:

$$\underline{\alpha}_p = \begin{bmatrix} \alpha_{po} = 0 \\ \alpha_{px} = \dfrac{a_x}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\ \alpha_{py} = \dfrac{a_y}{1-v^2/c^2} \\ \alpha_{pz} = \dfrac{a_z}{1-v^2/c^2} \end{bmatrix}$$

Quadridensità di corrente elettrica

Definiamo la densità di carica come

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} := \rho(t, \bar{x})$$

Se consideriamo un sistema proprio alla carica otteniamo

$$\Delta V_p = a' b' h' = a \cdot b \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta V}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Quindi

$$\rho_p = \lim_{\Delta V_p \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V_p} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = \rho \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow \rho(t, \bar{x}) = \frac{\rho_p}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Definiamo la densità di corrente come

$$\bar{J}(\bar{x}) = \rho(\bar{x})\, v(\bar{x}) = \frac{\rho_p}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, \bar{v}(\bar{x})$$

Definiamo la quadridensità di corrente

$$\underline{J}(\underline{x}) = \rho_p \cdot \underline{q}(\underline{x}) = \rho_p(\underline{x}) \begin{bmatrix} c/\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ \bar{v}/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \rho(\underline{x})\, c \\ \bar{J}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

1) Ma $\rho_p(\underline{x})$ è la densità di carica nel sistema di riferimento proprio ed è un invariante.

2) $\underline{q}(\underline{x})$ invece è un quadrivettore.

1+2) $\Rightarrow$ $\underline{J}(\underline{x})$ è un quadrivettore

Potenziali elettromagnetici

Consideriamo le equazioni di Maxwell

1) $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho / \varepsilon_0$

2) $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

3) $\bar{\nabla} \wedge \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B}$

4) $c^2 \bar{\nabla} \wedge \bar{B} = \frac{\bar{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}$

Dalla (2) $\exists\ \bar{A}$ ← potenziale vettore campo vettoriale tale che

$$\boxed{\bar{B} = \nabla \wedge \bar{A}.}$$

Dalla (3) abbiamo $\nabla \wedge \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \bar{A})$

$$\nabla \wedge \bar{E} = \nabla \wedge \left(-\frac{\partial}{\partial t} \bar{A} \right) \Rightarrow \nabla \wedge \left(\bar{E} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{A} \right) = 0 .$$

$\Rightarrow \exists\ \phi$ ← potenziale scalare campo scalare tale che

$$\bar{E} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{A} = -\nabla \phi \Rightarrow \boxed{\bar{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial}{\partial t} \bar{A}}$$

Sia $\nabla \wedge \bar{F} = 0 \rightarrow \bar{F} = -\nabla \psi \Rightarrow \nabla \wedge (\nabla \psi) = 0$

Da ciò si ricava che

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A} + \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \psi) = \bar{\nabla} \wedge (\bar{A} + \bar{\nabla} \psi) \quad \forall \psi$$

$\Rightarrow$ Il potenziale vettore non è unico

Abbiamo allora una famiglia di potenziali

$$\bar{A} = \bar{A}_0 - \bar{\nabla} \psi$$

$$\phi = \phi_0 + \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

Posso scegliere i potenziali in modo che soddisfino l'ulteriore condizione

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$ detta gauge di Lorentz

Dalla (4) abbiamo che

$$c^2 \, \bar{\nabla} \wedge \bar{B} = \frac{\bar{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}$$

$$c^2 \, \bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) = \frac{\bar{J}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left[- \bar{\nabla} \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right]$$

$$= \frac{\bar{J}}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A}$$

Ma $\bar{\nabla} \wedge (\bar{\nabla} \wedge \bar{A}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) - \Delta \bar{A}$

Quindi

$$c^2 \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) - c^2 \Delta \bar{A} = \frac{\bar{J}}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \phi - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A}$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\nabla} \phi = \frac{\bar{J}}{c^2 \varepsilon_0} + \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A}$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla} \underbrace{\left(\bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi \right)}_{= 0} = \frac{\bar{J}}{c^2 \varepsilon_0} + \Delta \bar{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \Delta \bar{A} = \frac{\bar{J}}{c^2 \varepsilon_0}}$$

Eq. per il potenziale vettore

Dalla (1) abbiamo

$$\bar\nabla\cdot\bar E = \rho/\varepsilon_0$$

$$-\nabla\cdot\left(\bar\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}\bar A\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$-\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\bar\nabla\cdot\bar A = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Sommiamo e togliamo $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}$

$$-\Delta\phi \underbrace{- \frac{\partial}{\partial t}\bar\nabla\cdot\bar A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}}_{= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar\nabla\cdot\bar A + \frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = 0} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Quindi

$$-\Delta\phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Eq. per il potenziale scalare

Quadripotenziale

Consideriamo le eq. per i potenziali

1) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} - \Delta\bar{A} = \frac{\bar{J}}{c^2\varepsilon_0}$

2) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Moltiplico la (2) per $c\,\varepsilon_0$ e ottengo

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi c\varepsilon_0 - \Delta\phi\cdot c\varepsilon_0 = \rho\cdot c = J_0$$

$$c^2\varepsilon_0\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\phi}{c} - \Delta\frac{\phi}{c}\right] = J_0$$

Dalla (1) ricavo subito

$$c^2\varepsilon_0\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{A} - \Delta\bar{A}\right] = \bar{J}$$

L'operatore $\square = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ è detto dalambertiano.

$$\begin{cases} \square\frac{\phi}{c} = \frac{J_0}{c^2\varepsilon_0} \\ \square\bar{A} = \frac{\bar{J}}{c^2\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow \square\begin{bmatrix} A_0 = \phi/c \\ \bar{A} \end{bmatrix} = \underline{J}\cdot\frac{1}{c^2\varepsilon_0}$$

Dove $\underline{A}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} A_0 \\ \bar{A} \end{bmatrix}$ è detto quadripotenziale

$$\square\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\underline{J}(\underline{x})}{c^2\varepsilon_0}$$

Quadridivergenza

Definiamo la quadridivergenza come l'operatore

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{C} = \frac{\partial C_0}{\partial x_0} + \overline{\nabla} \cdot \overline{C}$$

Dimostriamo che è invariante:

Sia $\underline{G}(x') = \Lambda \underline{C}(\underline{x})$

$$\underline{\nabla}' \cdot \underline{G}(\underline{x}') = \frac{\partial}{\partial x_0'} G_0 + \frac{\partial}{\partial x'} G_x + \frac{\partial}{\partial y'} G_y + \frac{\partial}{\partial z'} G_z$$

Ora:

$$\frac{\partial}{\partial x_0'} G_0(\underline{x}') = \frac{\partial x_0}{\partial x_0'} \frac{\partial G_0}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x_0'} \frac{\partial G_0}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x_0'}}_{0} \frac{\partial G_0}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x_0'}}_{0} \frac{\partial G_0}{\partial z}$$

Sapendo che $x_0 = \dfrac{x_0' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $x = \dfrac{x' + \frac{v}{c} x_0'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $y = y'$, $z = z'$

allora

$$\frac{\partial}{\partial x_0'} G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial G_0}{\partial x_0} + \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\partial G_0}{\partial x}$$

ma $$G_0 = \frac{C_0 - \frac{v}{c} C_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_0'} G_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\frac{\partial C_0}{\partial x_0} - v/c \frac{\partial C_x}{\partial x_0} \right]$$

$$+ \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\frac{\partial C_0}{\partial x} - \frac{v}{c} \frac{\partial C_x}{\partial x} \right]$$

Ora

$$\frac{\partial G_x}{\partial x'} = \frac{\partial x_0}{\partial x'}\frac{\partial G_x}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial G_x}{\partial x}$$

$$= \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\partial G_x}{\partial x_0} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{\partial G_x}{\partial x}$$

Ma $\qquad G_x = \dfrac{C_x - \frac{v}{c}C_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

allora

$$\frac{\partial G_x}{\partial x'} = \frac{\frac{v}{c}}{1-v^2/c^2}\left[\frac{\partial C_x}{\partial x_0} - \frac{v}{c}\frac{\partial C_0}{\partial x_0}\right] + \frac{1}{1-v^2/c^2}\left[\frac{\partial C_x}{\partial x} - \frac{v}{c}\frac{\partial C_0}{\partial x}\right]$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial y'} = \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{\partial C_y}{\partial y}$$

Analogamente

$$\frac{\partial G_z}{\partial z'} = \frac{\partial C_z}{\partial z}$$

Quindi

$$\underline{\nabla}'\cdot\underline{G}(\underline{x}') = \frac{1}{1-v^2/c^2}\left[\frac{\partial G_0}{\partial x_0} - \cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial C_x}{\partial x_0}}\right] + \frac{v/c}{1-v^2/c^2}\left[\cancel{\frac{\partial C_0}{\partial x}} - \frac{v}{c}\frac{\partial C_x}{\partial x}\right] + \frac{v/c}{1-v^2/c^2}\left[\cancel{\frac{\partial C_x}{\partial x_0}} - \frac{v}{c}\frac{\partial C_0}{\partial x_0}\right] + \frac{1}{1-v^2/c^2}\left[\frac{\partial C_x}{\partial x} - \cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial C_0}{\partial x}}\right] + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \left[\frac{\partial C_0}{\partial x_0} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial C_x}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial C_0}{\partial x_0} + \frac{\partial C_x}{\partial x} \right]$$

$$+ \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial C_0}{\partial x_0} + \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = \underline{\nabla} \cdot \underline{C}(\underline{x})$$

quindi la quadridivergenza è invariante

Quadrigradiente e Dalembertiano (13)-(14)

Definiamo il quadrigradiente come l'operatore

$$(\underline{\nabla} f)(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, -\vec{\nabla} f\right)$$

Dimostriamo che il Dalembertiano è invariante:

Mostriamo prima che $\Box f = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} f$

Infatti

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} f = \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \Delta f = \Box f \, .$$

Poniamo ora $g(\underline{x}') = f(\underline{x})$

$$(\underline{\nabla}' g)(\underline{x}') = (\Lambda \underline{\nabla} f)(\underline{x})$$

$$G \Rightarrow \underline{C} = \underline{\nabla} f$$

$$\Box' g = (\underline{\nabla}' \cdot \underline{\nabla}' g)(\underline{x}') = \underline{\nabla}' \cdot \underbrace{(\Lambda \underline{\nabla} f)(\underline{x})}_{G} = \underline{\nabla}' \cdot G$$

$$= \underline{\nabla} \cdot \underline{C} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} f)(\underline{x}) = \Box f$$

Trasformazione dei campi elettromagnetici

Consideriamo un sistema Σ' in moto$/\Sigma$ lungo x.

$$\Sigma \xrightarrow{\Lambda} \Sigma'$$

$$E_x' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A_x'}{\partial t'}$$

$$\frac{\phi'}{c} = A_0' = \frac{A_0 - \frac{v}{c} A_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad A_x' = \frac{A_x - \frac{v}{c} A_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Allora

$$E_x' = -c\frac{\partial A_0'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} =$$

$$= -c\left[\frac{\partial x_0}{\partial x'}\frac{\partial A_0'}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial A_0'}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial A_0'}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial A_0'}{\partial z}}\right]$$

$$-\left[\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial A'_x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial A_x'}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial y}{\partial t'}\frac{\partial A_x'}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial t'}\frac{\partial A_x'}{\partial z}}\right]$$

ma abbiamo che

$$x_0 = \frac{x_0' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial x'} = \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Quindi

$$E'_x = -c\left[\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_0}-\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x_0}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}-\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\right]$$
$$-\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t}-\frac{v}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{v}{c}\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{1-v^2/c^2}\left[+v\cancel{\frac{\partial A_0}{\partial x_0}}-\frac{v^2}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x_0}+c\frac{\partial A_0}{\partial x}-v\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x}}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial A_x}{\partial t}-\cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}}+v\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x}}-\frac{v^2}{c}\frac{\partial A_0}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{v^2/c}{1-v^2/c^2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_0}+\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)-\frac{1}{1-v^2/c^2}\left(c\frac{\partial A_0}{\partial x}+c\frac{\partial A_x}{\partial x_0}\right)$$

$$=\frac{v^2/c-c}{1-v^2/c^2}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_0}+\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{-c\,\cancel{(1-v^2/c^2)}}{\cancel{1-v^2/c^2}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x_0}+\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)=-c\frac{\partial A_0}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}=E_x$$

Analogamente

$$E_y' = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad , \quad E_z' = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Sia ora $\bar{B} = \bar{\nabla} \wedge \bar{A}$

$$B_x' = \frac{\partial A_z'}{\partial y'} - \frac{\partial A_y'}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$$

$$B_y' = \frac{\partial A_x'}{\partial z'} - \frac{\partial A_z'}{\partial x'} = \left(\cancel{\frac{\partial t}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial x}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial y}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial y}} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{A_x - \frac{v}{c} A_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) - \left(\frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z}} \right) A_z$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_x - \frac{v}{c} A_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) - \left(\frac{\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial t} A_z + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{\partial}{\partial x} A_z \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial z} A_0 - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_z - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \overset{A_0 = \phi/c}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z - \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \phi + \frac{\partial}{\partial t} A_z \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right)$$

Analogamente si ricava che

$$B_z' = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Equazione del moto per una carica lentamente accelerata dal campo elettromagnetico

Sia q una carica dotata di massa a riposo m_0 immersa in un campo elettromagnetico.
Supponiamo che la carica si muova lungo l'asse x di Σ con velocità $\bar{v}$.

Ad ogni istante t considero un sistema proprio Σ_p tale $v_p = 0$ allora

$$m_0 \overline{a_p} = q \bar{E}_p .$$

Sappiamo che
$$\begin{cases} a_{px} = \dfrac{a_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} \\[2ex] a_{py} = \dfrac{a_y}{1-v^2/c^2} \\[2ex] a_{pz} = \dfrac{a_z}{1-v^2/c^2} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} m_0 \dfrac{a_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = q E_{px} = q E_x \\[3ex] m_0 \dfrac{a_y}{1-v^2/c^2} = q E_{py} = q \dfrac{E_y - v B_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\[3ex] m_0 \dfrac{a_z}{1-v^2/c^2} = q E_{pz} = q \dfrac{E_z + v B_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_x}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}} = \dfrac{q}{m_0} E_x \\ \dfrac{a_y}{1-v^2/c^2} = \dfrac{q}{m_0} \dfrac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \dfrac{a_z}{1-v^2/c^2} = \dfrac{q}{m_0} \dfrac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

Notiamo che

$$\frac{a_y}{1-v^2/c^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Infatti $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \dfrac{a_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{v_y} \cdot \dfrac{d}{dt}\sqrt{1-v^2/c^2}$

Ricaviamo che

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} \dfrac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{q}{m_0} E_x \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{q}{m_0} \left(E_y - vB_z\right) \\ \dfrac{d}{dt} \dfrac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{q}{m_0} \left(E_z + vB_y\right) \end{cases}$$

Notiamo che $\bar{v} \wedge \bar{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -vB_z \\ vB_y \end{pmatrix}$

Allora segue che

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/C^2}} = \frac{q}{m_0} \left(\bar{E} + \bar{v} \wedge \bar{B} \right)$$

cioè

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/C^2}} = q \left(\bar{E} + \bar{v} \wedge \bar{B} \right) = F_L$$

Se il moto di una particella soddisfa l'equazione del moto relativistica allora la sua velocità non può raggiungere c partendo da velocità minori di c. (17)

Sia q una carica dotata di massa a riposo m_0 e immersa in un campo elettromagnetico e che soddisfa l'eq. del moto relativistica

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \bar{F}_L .$$

Poiché il campo elettromagnetico può assumere valori arbitrari allora possiamo porre

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = g(t).$$

Partiamo da una velocità $v_0 < c$.
Per semplicità poniamo $v_0 = 0$.

Integrando fra 0 e un istante t

$$\int_0^t \frac{d}{ds} \frac{v(s)}{\sqrt{1-\frac{v^2(s)}{c^2}}} ds = \int_0^t g(s)\, ds = G(t)$$

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = G(t)$$

Elevando al quadrato

$$\frac{v^2}{1-v^2/c^2} = G^2(t)$$

$$v^2 = G^2 - \frac{v^2}{c^2} G^2$$

$$v^2 \left(1 + \frac{G^2}{c^2}\right) = G^2$$

$$v^2 = \frac{G^2}{1+G^2/c^2} = \underbrace{\frac{G^2}{c^2+G^2}}_{<1} c^2 < c^2$$

$$\Rightarrow v^2 < c^2 \Rightarrow v < c \quad \forall t.$$

Conseguenza dell'esistenza di particelle con $v > c$?

(18)

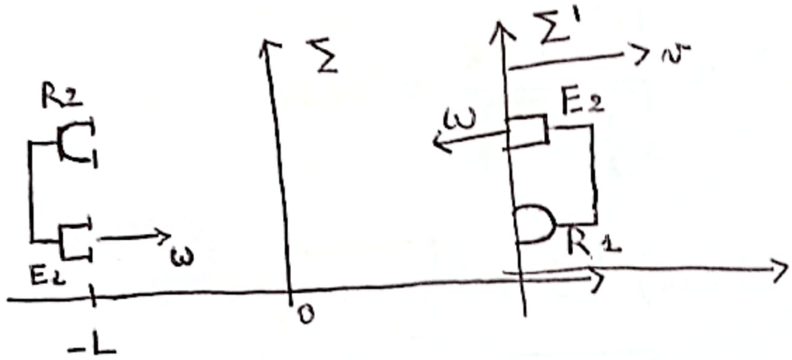
Tachioni: particelle con $w > c$

Consideriamo due sistemi di riferimento Σ e Σ' canonici, correlato a Σ.

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Trasf. di Lorentz

Consideriamo un sistema



1) E_1 emette in $t_1 = -\frac{L}{w}$ un tachione verso l'origine

2) Se R_2 rileva un tachione, spegne E_1 in t_2
$\Rightarrow E_1$ non può emettere tachioni $\forall\, t > t_2$.

3) R_1 rileva un tachione al tempo t_0' e di conseguenza E_2 emette un tachione con velocità $\overline{w} > c$ (rispetto a Σ') verso l'origine

Quindi

E_1 emette un tachione al tempo $t = -\frac{L}{\omega}$

Il tachione ha legge $X_1(t) = -L + \omega(t - t_1)$

Raggiunge l'origine quando

$-L + \omega(t - t_1) = 0 \Rightarrow t = \frac{L}{\omega} + t_1 = \frac{L}{\omega} - \frac{L}{\omega} = 0$

In $t = 0$, $x = 0 \Rightarrow t' = 0$, $x' = 0$

Quindi in $t_0' = 0$ R_1 rileva un tachione

$\Rightarrow E_2$ emette un tachione con velocità $-\omega$ in Σ'

L'eq. del moto è

$$X_2'(t') = -\omega t'$$

Quando raggiunge R_2?

$$-L = X_2(t_2) = \frac{X_2' + v t_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{-\omega t_2' + v t_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$-L\sqrt{1 - v^2/c^2} = t_2'(v - \omega)$$

$$\Rightarrow t_2' = \frac{-L\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v - \omega}$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} X_2'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\frac{-L\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v - \omega} - \frac{v}{c^2}\omega \frac{L\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\omega - v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{L}{\omega - v} - \frac{L}{\omega - v} \cdot \frac{v\omega}{c^2} = \frac{L}{\omega - v}\left(1 - \frac{v\omega}{c^2}\right)$$

Al tempo t_2, R_2 spegne E_1 che non può emettere tachioni $\forall t > t_2$.

Può capitare che $t_2 < t_1$?

$$\frac{L}{w-v}\left(1-\frac{vw}{c^2}\right) < -\frac{L}{w}$$

$$w - v\frac{w^2}{c^2} < v - w$$

$$v\left(1+\frac{w^2}{c^2}\right) > 2w$$

$$v > \frac{2w}{1+w^2/c^2}$$

$$f(w) = \frac{2w}{1+w^2/c^2}$$

$$f'(w) = \frac{2\left(1+w^2/c^2\right) - 2w\cdot\frac{2w}{c^2}}{\left(1+w^2/c^2\right)^2}$$

$$= \frac{2 + 2w^2/c^2 - 4w^2/c^2}{\left(1+w^2/c^2\right)^2} = \frac{2\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)}{\left(1+w^2/c^2\right)^2}$$

$$1-\frac{w^2}{c^2} > 0 \iff \frac{w^2}{c^2} < 1 \iff w^2 < c^2 \iff w < c$$

Quindi la funzione è crescente per $w < c$ e decresce per $w > c$

Il massimo lo abbiamo in c e vale

$$f(c) = \frac{2c}{1+1} = \frac{2c}{2} = c$$

Dunque $\forall \omega > c$, $f(\omega) < c$

$\Rightarrow \exists v$ t.c. $c > v > f(\omega)$ assurdo!

Principi di conservazione

Nella meccanica Newtoniana sappiamo che la quantità di moto $\bar{p} = m\bar{v}$ si conserva.

È possibile invece mostrare che questa quantità non si conserva in relatività.

DIM

Siano A e B due particelle che si scontrano con velocità rispettivamente $\bar{v}_A = (v, u)$
$\bar{v}_B = (-v, -u)$

Prima dell'urto:

$$P = P_A + P_B = \begin{cases} P_x = m_0 v - m_0 v = 0 \\ P_y = m_0 u - m_0 u = 0 \end{cases}$$

Dopo l'urto:

$W_A = (-v, u)$

$W_B = (v, -u)$

$$Q = Q_A + Q_B = \begin{cases} Q_x = -m_0 v + m_0 v = 0 \\ Q_y = m_0 u - m_0 u = 0 \end{cases}$$

Quindi la quantità di moto si conserva.

Ma se consideriamo un sistema Σ' che si muove

canon. rispetto a Σ con velocità $\bar{v}_0 = (v, 0)$

le leggi di trasformazione della velocità implicano che

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} \quad , \quad v_y' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v_x \frac{v}{c^2}} v_y$$

Allora abbiamo prima dell'urto:

$$v'_{Ax} = 0$$

$$v'_{Ay} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\, v_{Ay} = \frac{u}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$v'_{Bx} = \frac{-v-v}{1+v^2/c^2} = \frac{-2v}{1+v^2/c^2}$$

$$v'_{By} = \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v^2/c^2}(-u) = -\frac{u\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v^2/c^2}$$

$$P' = \begin{cases} P'_x = m_0 \cdot 0 + m_0 \cdot \frac{-2v}{1+v^2/c^2} = -\frac{2v m_0}{1+v^2/c^2} \\ P'_y = m_0 \frac{u}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 \frac{u\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v^2/c^2} \end{cases}$$

$$= \frac{2m_0 \frac{v^2}{c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^4}{c^4}}$$

Dopo l'urto

$$Q'_x = Q'_{Ax} + \overset{0}{\cancel{Q'_{Bx}}} = -\frac{2m_0 v}{1+v^2/c^2}$$

$$Q'_y = Q'_{Ay} + Q'_{By} = m_0 \frac{u\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v^2/c^2} + m_0 \frac{-u\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v^2/c^2} =$$

$$= \frac{-2m_0\frac{v^2}{c^2}\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v^4}{c^4}}$$

$$Q'_y \neq P_y$$

Cosa si conserva allora in relatività speciale?

Cerchiamo una quantità della forma

$$\bar{P} = \mu(\bar{v}) \cdot \vec{v} = \mu(v, \hat{n})\, \bar{v} \qquad \hat{n} = \frac{\bar{v}}{v}$$

Se considero un sistema $\hat{\Sigma}$ fermo$/_{\Sigma}$ e ruotato

Si ha che $\qquad \hat{P} = R\bar{P}$

$$\hat{P} = \mu(\hat{v}, \hat{n})\, \hat{v} = \mu(v, R\bar{n}) R\bar{v}$$

$$R\bar{P} = R\, \mu(v, \hat{n})\, \bar{v}$$

Quindi

$$\mu(v, R\bar{n}) \cancel{\bar{v}} = \mu(v, \hat{n}) \cancel{\bar{v}}$$

$$\Rightarrow \mu(v, R\bar{n}) = \mu(v, \bar{n})$$

$\Rightarrow$ μ non dipende dalla rotazione

quindi dipende solo dal modulo di $\bar{v}$

Sia allora

$$\bar{P} = \mu(v^2)\, \bar{v}$$

Imponiamo la conservazione:

Consideriamo l'esempio precedente

$$\bar{P}' = \bar{Q}'$$

$$P'_x = \mu(v_A'^2)\, v'_{Ax} + \mu(v_B'^2)\, v'_{Bx}$$

$$= \mu\left(\frac{u^2}{1 - v^2/c^2}\right) \cdot 0 + \mu\left(\frac{4v^2}{(1+v^2/c^2)^2} + \frac{u^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{(1+v^2/c^2)^2}\right) \cdot \left(\frac{-2v}{1+v^2/c^2}\right)$$

$$P_x' = \mu\left(\frac{4v^2 + u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right)\left(-\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$Q_x' = \mu(w_A'^2)\, w_x^{A'} + \underbrace{\mu(w_B'^2)\, w_{Bx}'}_{=0} =$$

$$= \mu\left(\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right)\left(-\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right) = P_x'$$

$\Rightarrow$ La componente x si conserva.

$$P_y' = \mu(v_A'^2)\, v_{Ay}' + \mu(v_B'^2)\, v_{By}'$$

$$= \mu\left(\frac{u^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\cdot\frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \mu\left(\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right)\left(-\frac{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$Q_y' = \mu(w_A'^2)\, w_{Ay}' + \mu(w_B'^2)\, w_{By}' =$$

$$= \mu\left(\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\right)\cdot\frac{u\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

$$+ \mu\left(\frac{u^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\left(-\frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

Imponiamo $P_y' = Q_y'$

$$\Rightarrow \cancel{2}\mu\left(\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2} + \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)}u^2\right)\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v^2}{c^2}}u +$$

$$-\cancel{2}\mu\left(\frac{u^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\frac{u}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 0$$

Questa condizione vale per ogni v, u

In particolare per $u=0$

$$\mu\left(\frac{4v^2}{(1+v^2/c^2)^2}\right)\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1+v^2/c^2} = \mu(0)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\frac{4v^2}{(1+v^2/c^2)^2}\right) = \frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}\,\mu(0)$$

Poniamo $s^2 = \dfrac{4v^2}{(1+v^2/c^2)^2} \Rightarrow \dfrac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2/c^2}}$

Quindi

$$\mu(s^2) = \frac{1}{\sqrt{1-s^2/c^2}}\,\mu(0)$$

Da cui

$$P_c = \frac{\mu(0)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,v$$

Inoltre

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\|P\|}{\|P^c\|} = \dfrac{m_0\|v\|}{\mu(v^2)\|v\|} & \longrightarrow & \dfrac{m_0}{\mu(0)} \\
\searrow & & \swarrow \\
& 1 & \Rightarrow \mu(0) = m_0
\end{array}$$

Quindi

$$P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Quantità di moto relativistica

Effetto Doppler

Siano $\overline{E}$ e $\overline{B}$.

Consideriamo le eq. di Maxwell nel vuoto

$$\begin{cases} \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = 0 \\ \overline{\nabla} \wedge \overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} \\ \overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0 \\ c^2 \, \overline{\nabla} \wedge \overline{B} = \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} \end{cases}$$

con ρ e J nulli.

Una soluzione particolare per questo sistema è rappresentato dalle onde piane, cioè delle soluzioni che dipendono solo da t e da x (per esempio) e che verificano le seguenti proprietà:

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{E}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial z} = 0$$

Consideriamo ora la soluzione particolare

$$E_y = E_0 \sin k(x - ct)$$

$$B_z = \frac{E_0}{c} \sin k(x - ct)$$

$$E_x = 0 \;,\; E_z = 0$$

$$B_x = 0 \;,\; B_y = 0$$

Consideriamo un sistema Σ' canonicamente correlato a Σ.

Sappiamo che

$$E_{x'} = E_x = 0$$

$$E_{z'} = \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0$$

$$B_{x'} = B_x = 0$$

$$B_{y'} = \frac{B_y + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0$$

$$E_{y'} = \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E_0 \frac{\left(\sin k(x-ct) - \frac{v}{c} \sin k(x-ct) \right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{E_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sin k(x-ct) = E_0' \sin k(x-ct)$$

Ricaviamo tutto in termini di t', x', y', z':

$$k(x-ct) = k \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - kc \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[x' \left(1 - \frac{v}{c}\right) - c \left(1 - \frac{v}{c}\right) t' \right]$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} k (x' - ct') = k' (x' - ct')$$

Quindi abbiamo

$$E_y' = E_0' \sin K'(x' - ct')$$

In Σ' varia K in K' e quindi varia la lunghezza d'onda:

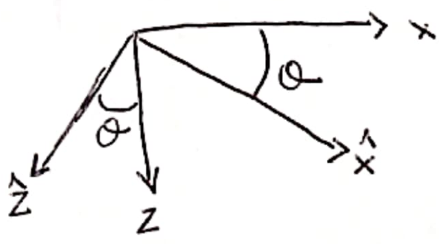
$$\lambda' = \frac{2\pi}{K'} = \frac{2\pi}{K}\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\right)} = \lambda \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{\left(1-\frac{v}{c}\right)}$$

Cambia anche la frequenza:

$$\nu' = \frac{k'c}{2\pi} = \frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} K \frac{c}{2\pi} = \frac{\left(1-\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\nu$$

Variazione dell'angolo di propagazione (21)

Consideriamo ora il caso in cui l'onda si propaga lungo una direzione generica nel piano xz



$$\hat{x} = x\cos\theta - z\sin\theta$$
$$\hat{z} = x\,\mathrm{sen}\,\theta + z\cos\theta$$
$$\hat{y} = y$$

Allora abbiamo

$$\hat{E}_y = E_0 \sin k(\hat{x} - ct) \longrightarrow E_y = E_0 \sin k(x\cos\theta - z\sin\theta - ct)$$

$$\hat{B}_z = \frac{E_0}{c}\sin k(\hat{x} - ct) \longrightarrow B_z = \frac{E_0}{c}\cos\theta \sin k(x\cos\theta - z\sin\theta - ct)$$

$$\hat{B}_x = 0 \longrightarrow B_x = \frac{E_0}{c}\,\mathrm{sen}\,\theta \sin k(x\cos\theta - z\sin\theta - ct)$$

Consideriamo Σ' canonicamente correlato $/\Sigma$:

$$E_{x'} = E_x = 0$$

$$E_{y'} = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E_0 \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sin k(x\cos\theta - z\sin\theta - ct)$$

$$E_{z'} = \frac{\overset{=0}{E_z} + v\overset{=0}{B_y}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 0$$

$$= E_0 \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sin\left[k\left(\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cos\theta - z'\,\mathrm{sen}\,\theta - c\,\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\right]$$

$$= E_0 \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sin\left[k\left(\frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x' - z'\,\mathrm{sen}\,\theta - ct'\,\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)\right]$$

$$= E_0 \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sin\left[\underbrace{K \left(\frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)}_{K'} \left(\underbrace{\frac{\cos\theta - \frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}}_{\cos\theta'} x' - z' \underbrace{\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}}_{\operatorname{sen}\theta'} \operatorname{sen}\theta - ct' \right) \right]$$

$$= E_0 \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \sin\left[K' \left(x'\cos\theta' - z'\operatorname{sen}\theta' - ct' \right) \right]$$

Dove $$K' = K \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\nu' = \frac{K'c}{2\pi} = K \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{c}{2\pi} = \frac{1-\frac{v}{c}\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \nu$$

ygl.

Lagrangiana relativistica

Sia e una carica lentamente accelerata da un campo elettromagnetico e che soddisfa l'eq. del moto relativistica

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e(\bar{E} + \bar{v} \wedge \bar{B})$$

Vogliamo trovare la Lagrangiana del sistema.

Devono essere soddisfatte le eq. di Eulero-Lagrange.

Poniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = eE_x + e v_y B_z - v_z B_y \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \end{cases}$$

Poniamo $\dfrac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \dfrac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \Rightarrow \mathcal{L}_1 = \lambda \sqrt{1-v^2/c^2}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \frac{\lambda (-\cancel{2} v_x)/c^2}{\cancel{2}\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Allora $-\lambda \cancel{v_x}/c^2 = m_0 \cancel{v_x}$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = -m_0 c^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_1 = -m_0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$$

Ora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial v_x} = eE_x + e v_y B_z - v_z B_y$$

$$= -e\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} +$$

$$- e v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - e v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + e v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} = \circledast$$

Aggiungendo e sottraendo $e v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$

$$\circledast = -e\frac{\partial}{\partial x}(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - e\frac{\partial A_x}{\partial t} - e v_y \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$- e v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} - e v_x \frac{\partial A_x}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - e\frac{\partial A_x}{\partial t} - e\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - e\frac{d}{dt}A_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A})$$

Abbiamo ottenuto che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A}) = \frac{\partial}{\partial x} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A})$$

Poniamo $\mathcal{L}_2 = -e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A})$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v_x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)}{\partial v_x} = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_2 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x}}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = -m_0 c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\phi - \bar{v}\cdot\bar{A})$$

Hamiltoniana relativistica

Sia la lagrangiana del sistema

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e(\phi - \bar{v} \cdot \bar{A})$$

Poniamo le nuove variabili

$$\tilde{t} = t$$

$$\tilde{q}_J = x_J$$

$$\tilde{p}_J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_J} = \frac{m_0 v_J}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e A_J$$

$$\Rightarrow v_J = \frac{p_J - e A_J}{m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\Rightarrow v^2 = \sum_J v_J^2 = \underbrace{\sum_J \frac{(p_J - e A_J)^2}{m_0^2}}_{S} \left(1 - v^2/c^2\right)$$

$$v^2 + \frac{v^2}{c^2} S = S$$

$$v^2 \left(1 + \frac{1}{c^2} S\right) = S$$

$$v^2 = \frac{S}{1 + \frac{S}{c^2}} = \frac{c^2 S}{c^2 + S}$$

Si può ricavare che

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\phi$$

Da cui si ricava che

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\cancel{c^2} S}{(c^2+S)\cancel{c^2}}}} + e\phi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\frac{c^2+\cancel{S}-\cancel{S}}{c^2+S}}} + e\phi$$

$$= \frac{m_0 c^{\cancel{2}} \cdot \sqrt{c^2+S}}{\cancel{c}} + e\phi$$

$$= m_0 c \sqrt{c^2 + S} + e\phi$$

$$= c\sqrt{m_0^2 c^2 + \cancel{m_0^2} \sum_J \frac{(\tilde{p}_J - eA_J)^2}{\cancel{m_0^2}}} + e\phi$$

$$= c\sqrt{m_0^2 c^2 + \sum_J (\tilde{p}_J - eA_J)^2} + e\phi$$

Lagrangiana Covariante

Consideriamo la Lagrangiana relativistica

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e(\phi - \bar{v} \cdot \bar{A})$$

Vogliamo effettuare un cambio delle coordinate in modo da ottenere l'eq. del moto lagrangiana rispetto ad un nuovo sistema di riferimento.

Ricordiamo che $\dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

dove τ è il tempo proprio.

Riscriviamo le coordinate in funzione del tempo proprio

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_0(\tau) \\ x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{bmatrix} c \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

Deve essere verificato che

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_J} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_J}$$

Consideriamo l'equazione del moto

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-e(\phi - \bar{v} \cdot \bar{A})\right) - e \frac{dA_x}{dt}$$

Moltiplico a sinistra e a destra per $\dfrac{dt}{d\tau}$

$$\frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x} - e(\varphi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - e\frac{dA_x}{dt}\right)$$

$$m_0 \frac{d}{d\tau}\underbrace{\frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{\omega_x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\partial}{\partial x} - e(\varphi - \bar{v}\cdot\bar{A}) - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\, e(\varphi - \bar{v}\cdot\bar{A})}{\partial v_x}$$

$$m_0 \frac{d}{d\tau}\omega_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[-e\left(\underbrace{\frac{\varphi}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{c}{c}}_{\omega_0} - \underbrace{\frac{\bar{v}\cdot\bar{A}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}_{\bar{\omega}}\right)\right] - e\frac{d}{d\tau}\frac{\partial(\bar{\omega}\cdot\bar{A})}{\partial \omega_x}$$

$$m_0 \frac{d}{d\tau}\omega_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[-e\left(\frac{\varphi\,\omega_0}{c} - \bar{\omega}\cdot\bar{A}\right)\right] - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \omega_x}\left(-e(\omega_0 A_0 - \bar{\omega}\cdot\bar{A})\right)$$

$$m_0 \frac{d}{d\tau}\omega_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[-e\left(A_0\omega_0 - \bar{\omega}\cdot\bar{A}\right)\right] - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \omega_x}\left[-e(\omega_0 A_0 - \bar{\omega}\cdot\bar{A})\right]$$

Poniamo $\mathcal{L}_2 = -e(A_0\omega_0 - \bar{\omega}\cdot\bar{A})$

$$m_0 \frac{d}{d\tau}\omega_x = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \omega_x}$$

Poniamo $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}m_0(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \omega_x} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \omega_x} \quad \underbrace{}_{=0}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \omega_x} + \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \omega_x} = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} m_0 \overline{w}^2 - e\left(w_0 A_0 - \overline{w} \cdot \overline{A}\right)$$

In realtà non soddisfa le eq. di Eulero - Lagrange (ci sono delle imprecisioni)

Si può mostrare che in realtà quella corretta è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 \left(w_0^2 - \overline{w}^2\right) + e\left(w_0 A_0 - \overline{w} \cdot \overline{A}\right)$$